UNIVERSITAS BUDENSIS

A hálózat kiegyenlítésről

Földváry Lóránt

ÓBUDAI EGYETEM
ALBA REGIA MŰSZAKI KAR

www.uni-obuda.hu

Hálózatkiegyenlítés aktualitása

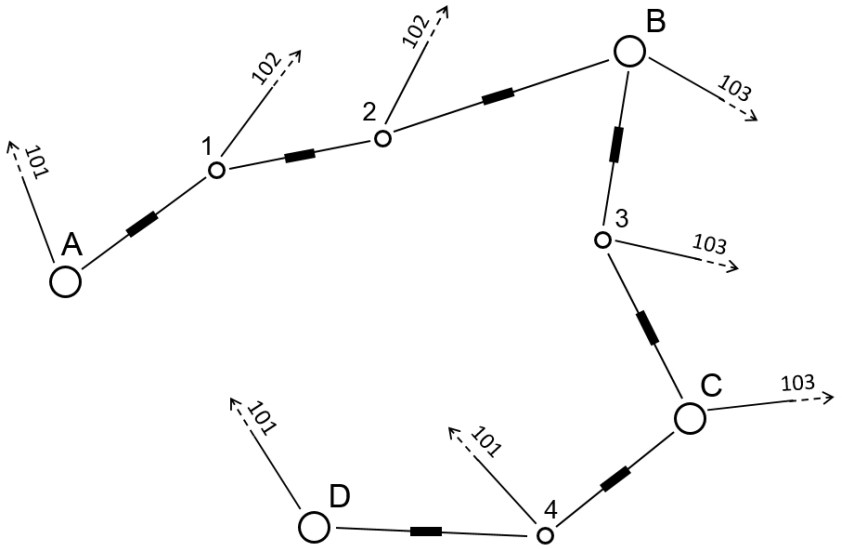
Alappontsűrítés: gyakori mérnöki feladat

Magassági alappontsűrítés gyakorlata:
(1) Két országos alappont között vonalszintezés, feldolgozás során a magassági záróhiba elosztása
(2) Magassági csomópont kialakítása, feldolgozás során előbb a csomópont, majd a további pontok kerülnek meghatározásra.

Javaslat: hálózatkiegyenlítés

Hálózatkiegyenlítés aktualitása

Alappontsűrítés:



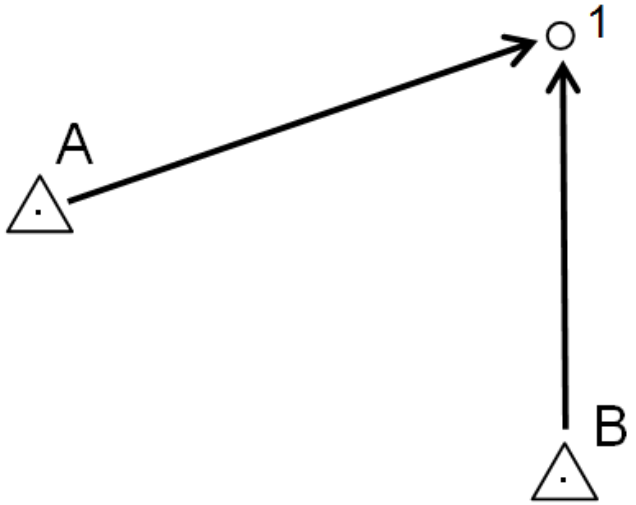
Vízszintes alappontsűrítés gyakorlata:
(1) irány- és távméréseket végzünk, a feldolgozás pontonként történik.
(2) az irány- és távméréseket sokszögvonalként dolgozzuk fel.

Javaslat: hálózatkiegyenlítés

UNIVERSITAS BUDENSIS

Hálózatkiegyenlítés aktualitása

Alappontsűrítés:

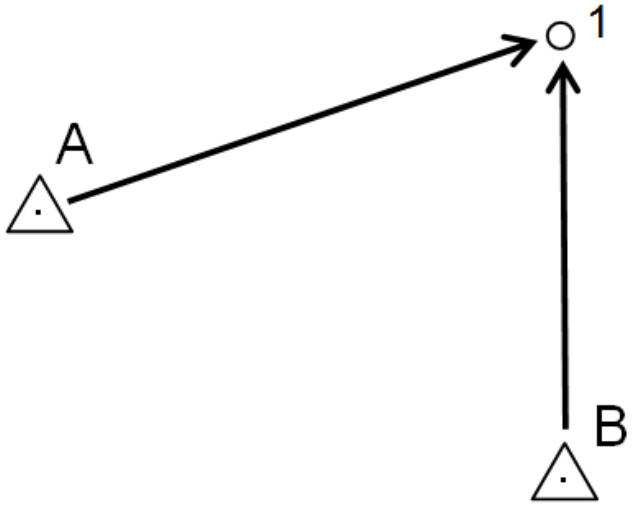


Házatos RTK-val végzett alappontsűrítés
Legalább két vektort mérjünk, hogy legyen fölösmérés!

- ugyanolyan beállításokkal, két alkalommal, független felállással
- ugyanabban a felállásban, eltérő beállításokkal

Hálózatkiegyenlítés aktualitása

Alappontsűrítés:



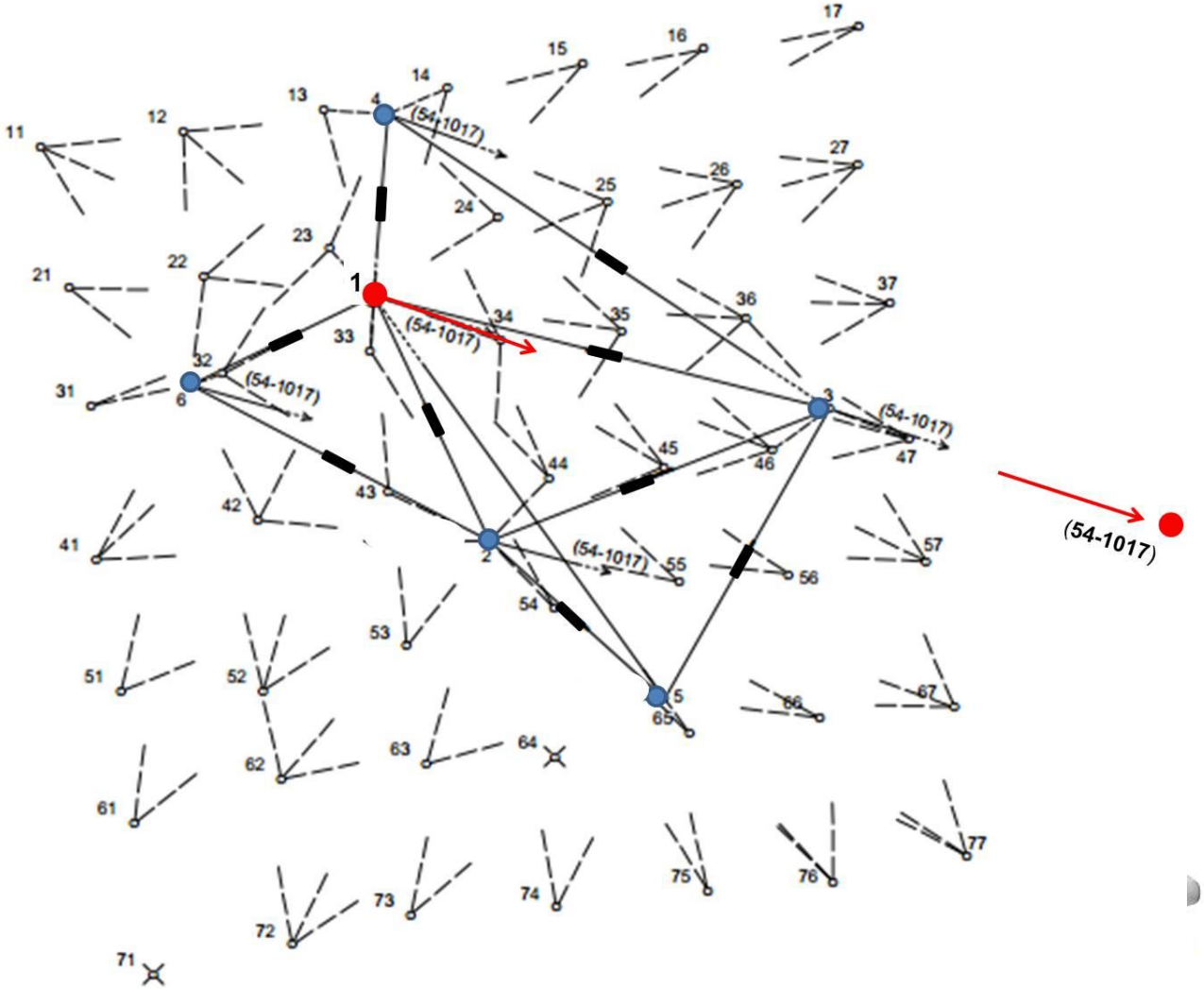
Házatos RTK-val végzett alappontsűrítés
Feldolgozás: utófeldolgozással
Bemeneti adatok:

- térbeli vektor három összetevője
- a mérések kovariancia mátrixa

Hálózatkiegyenlítés aktualitása

Sokszor indokolt kombinált alappontsűrítést végezni.

Önálló hálózatként kiegyenlítve is ETRS koordinátákat nyújt.



UNIVERSITAS BUDENSIS

Kiegyenlítő számítások

Feladata: fölösmérésekkel végzett mérések optimális feldolgozása.

A mérések hibával terheltek, ezért a kiegyenlítés során módosítjuk (javításokkal látjuk el) ezeket úgy, hogy a mérések ellentmondás mentesen szolgáltassanak megoldást.

Legkisebb Négyzetek Módszere: a javítások négyzetösszegének minimalizálása mellett nyújt optimális megoldást.

UNIVERSITAS BUDENSIS

Kiegyenlítő számítások

Legkisebb Négyzetek Módszere: a javítások négyzetösszegének minimalizálása mellett nyújt optimális megoldást.

$$\mathbf{v^T P v \longrightarrow min.}$$

Kiegyenlítő számítások csoportjai

I. kiegyenlítési csoport: egy ismeretlenre végzett közvetlen mérések kiegyenlítése

II. kiegyenlítési csoport: közvetett mérések kiegyenlítése

III. kiegyenlítési csoport: közvetlen mérések kiegyenlítése

IV. kiegyenlítési csoport: közvetett mérések kiegyenlítése kényszerfeltételekkel

V. kiegyenlítési csoport: közvetlen mérések kiegyenlítése feltételekkel és paraméterekkel

VI. kiegyenlítési csoport: közvetlen mérések kiegyenlítése feltételekkel, paraméterekkel és kényszerfeltételekkel.

UNIVERSITAS BUDENSIS

II. kiegyenlítési csoport

Közvetett mérések kiegyenlítése:

mérések	paraméterek
(n db.)	(m db.)

Közvetítő egyenletek: Az egyes méréseket megadja a paraméterek és ismert mennyiségek függvényében.

Javítási egyenletek:

$$\mathbf{v = Ax + l}$$

UNIVERSITAS BUDENSIS

II. kiegyenlítési csoport

Közvetett mérések kiegyenlítése:

Javítási egyenletek:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{l}$$

A javítási egyenletek megoldása a $\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}$ értékének minimalizálása mellett:

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{l})$$

Hálózatkiegyenlítés II. kiegyenlítési csoporttal

<u>Magassági hálózatok</u>

Közvetítő egyenletek:

$$\Delta m + v = M_V - M_K$$

Javítási egyenletek:

$$v = x_V - x_K + M_{Ve} - M_{Ke} - \Delta m$$

v = Ax + l

Hálózatkiegyenlítés II. kiegyenlítési csoporttal

<u>Vízszintes hálózatok</u>

Közvetítő egyenletek:

$$t = \sqrt{(y_I - y_A)^2 + (x_I - x_A)^2}$$

$$i = \arctan\left(\frac{y_I - y_A}{x_I - x_A}\right) - z_A$$

Javítási egyenletek:

$$v = y_I sin\delta_{AI} + x_I cos\delta_{AI} - y_A sin\delta_{AI} - x_A cos\delta_{AI} + \\ + (Y_{Ie} - Y_{Ae}) sin\delta_{AI} + (X_{Ie} - X_{Ae}) cos\delta_{AI} - t$$

$$v = -z_A + \frac{cos\delta_{AI}}{t} y_I - \frac{sin\delta_{AI}}{t} x_I - \frac{cos\delta_{AI}}{t} y_A + \frac{sin\delta_{AI}}{t} x_A \\ + \frac{(Y_{Ie} - Y_{Ae}) cos\delta_{AI} - (X_{Ie} - X_{Ae}) sin\delta_{AI}}{t} \rho''$$

Hálózatkiegyenlítés II. kiegyenlítési csoporttal

Magassági hálózatok:

- alakmátrix mérete:
  $(n_{\Delta m}, n_P)$
  $n_{\Delta m}$ - mérések száma
  n_P – ismeretlen pontok száma
- tisztatag vektor mérete:
  $(n_{\Delta m}, 1)$
- súlymátrix mérete:
  $(n_{\Delta m}, n_{\Delta m})$

UNIVERSITAS BUDENSIS

Hálózatkiegyenlítés II. kiegyenlítési csoporttal

Vízszintes hálózatok:

- alakmátrix mérete:

  $(n_i + n_t , n_A + 2n_P)$ vagy $(n_i + n_t + n_A , 2n_P)$

  n_t - távmérések száma

  n_i - az iránymérések száma

  n_A - álláspontok száma

  n_P – ismeretlen pontok száma

- tisztatag vektor mérete:

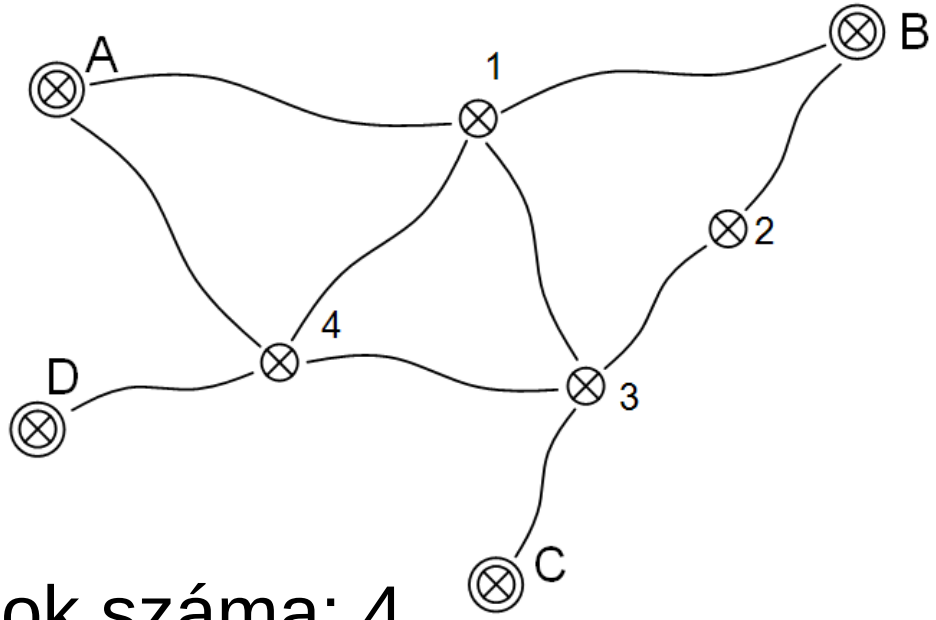
  $(n_i + n_t , 1)$ vagy $(n_i + n_t + n_A , 1)$

- súlymátrix mérete:

  $(n_i + n_t , n_i + n_t)$ vagy $(n_i + n_t + n_A, n_i + n_t + n_A)$

Példa: szintezési hálózat

Megoldás menete:



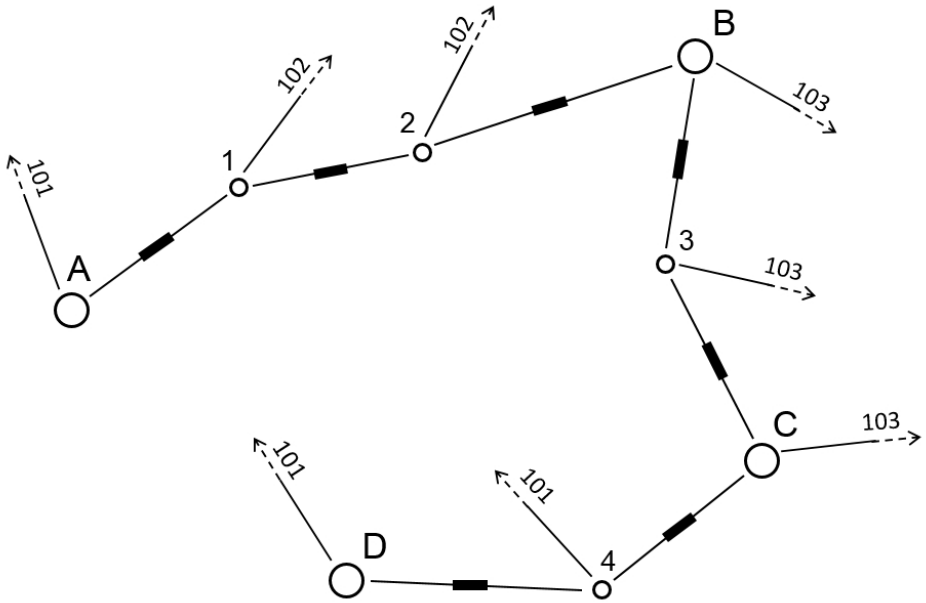
Ismert magasságú pontok száma: 4
Meghatározandó pontok száma: 4
Mérések száma: 10

- alakmátrix mérete: (10 , 4)
- tisztatag mérete: (10 , 1)
- súlymátrix mérete: (10 , 10)

UNIVERSITAS BUDENSIS

Példa: vízszintes hálózat

Megoldás menete:



Ismert pontok száma: 4

Meghatározandó pontok száma: 4

Mérések száma: 36

(8 állásponton 22 irány- és 14 távmérés)

- alakmátrix mérete: (36 , 16) vagy (44 , 8)
- tisztatag mérete: (36 , 1) vagy (44 , 1)
- súlymátrix mérete: (36 , 36) vagy (44 , 44)

UNIVERSITAS BUDENSIS
www.uni-obuda.hu

Hálózatkiegyenlítés korlátai

Előfeltételek:

A méréseket csak véletlen (sztochasztikus) hibák terhelik (tehát durva és szabályos hiba nincs)

Durva hiba hatása:

- a hibát nagyobb területre szétkeni
- statisztikák alapján feltárható

Szabályos hiba hatása:

- a hiba lokálisan jelentkezik
- nem derül ki a pontossági mérőszámokból

Hálózatkiegyenlítés korlátai

Előfeltételek:

A méréseket „megfelelő” geometriai elrendezésűek (jól kondicionált egyenletrendszer)

A fölösmérések eloszlása is egyenletes

Kérdés: bevonjunk-e fölösmérés nélküli méréseket is a kiegyenlítésbe?

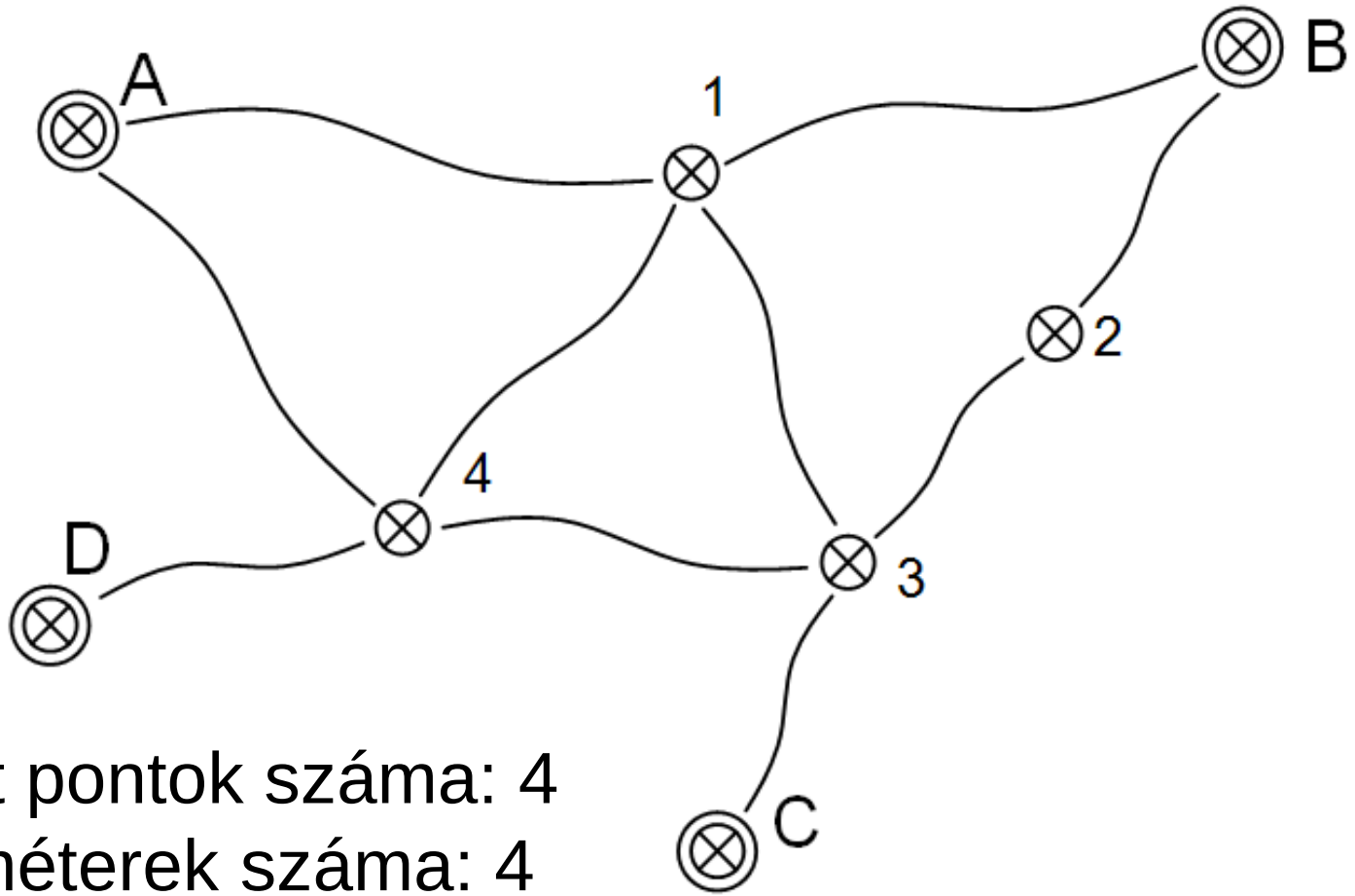
- ahol nincs fölösmérés, ott a javítás is nulla
- nem befolyásolja a súlyegység középhibát sem
- feleslegesen nagyobb normál egyenletrendszer
- nagyobb kerekítési hibák, rosszabb kondíció

Hálózatkiegyenlítés korlátai

Előfeltételek:

A mérések súlyviszonya (az *a priori* középhibák) „jól” ismertek; realisztikus a súlyozás, illetve a súlyarányok felvétele

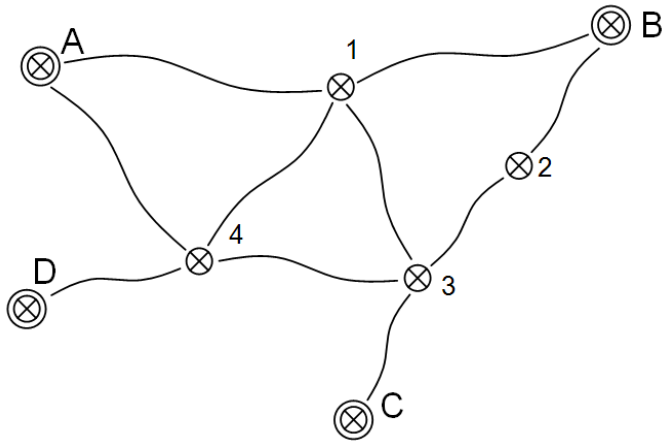
Példa szintezési hálózat kiegyenlítésére



Ismert pontok száma: 4
Paraméterek száma: 4
Mérések száma: 10
Fölösmérések száma: 6

UNIVERSITAS BUDENSIS

Példa szintezési hálózat kiegyenlítésére



Mérések [m]	
A-1	-5.567
A-4	-0.460
4-D	+1.578
3-4	-2.488
4-1	-5.045
1-3	+7.541
C-3	+5.819
3-2	-6.760
2-B	-2.590
B-1	+1.804

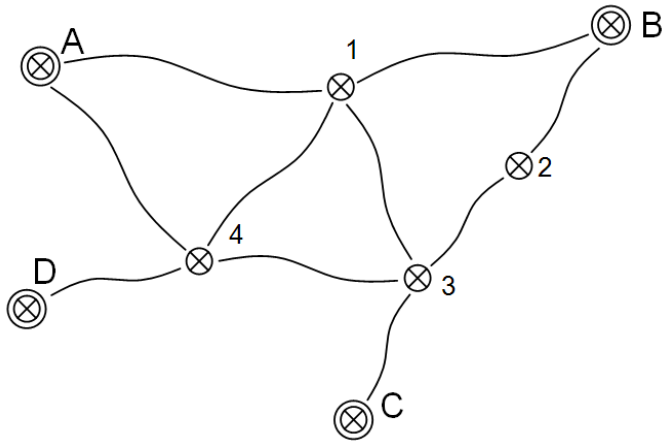
Ismert pontok [mBf]	
A	146.521
B	147.304
C	154.071
D	151.599

Előzetes mag. [mBf]	
1	152.064
2	144.739
3	148.224
4	153.152

UNIVERSITAS BUDENSIS

Példa szintezési hálózat kiegyenlítésére

Eredmények:

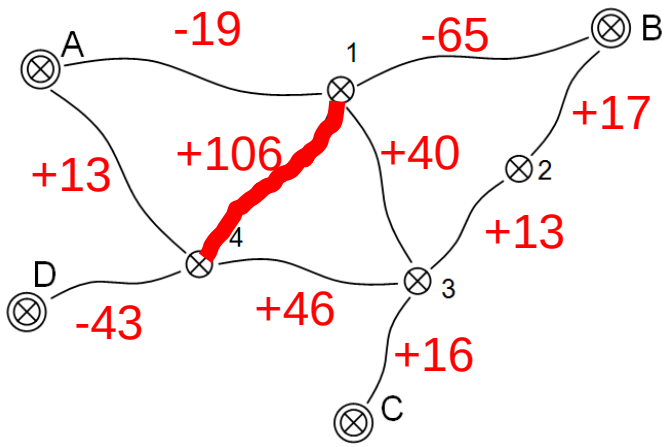


Mérések [m]		*v* [mm]
A-1	-5.567	+28
A-4	-0.460	-24
4-D	+1.578	-6
3-4	-2.488	+6
4-1	-5.045	-10
1-3	+7.541	-4
C-3	+5.819	+19
3-2	-6.760	+12
2-B	-2.590	+15
B-1	+1.804	-18

Előzetes mag. [mBf]		*x* [mm]
1	152.064	+4
2	144.739	+10
3	148.224	-9
4	153.152	-19

Példa szintezési hálózat kiegyenlítésére

Durva hiba hatása:
1-4 vonalon: +20 cm

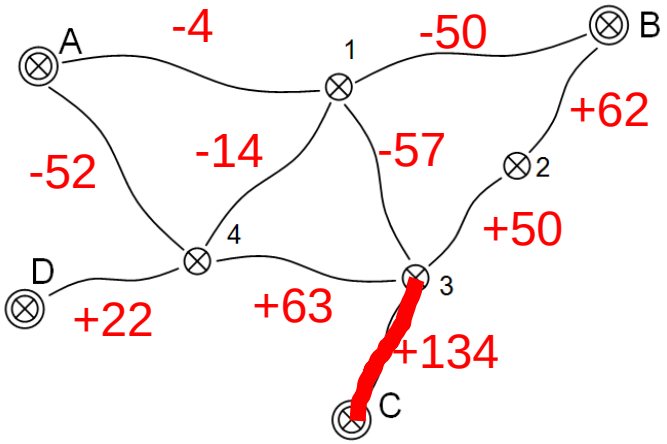


Mérések [m]		*v* [mm]
A-1	-5.567	+19
A-4	-0.460	+13
4-D	+1.578	-43
3-4	-2.488	+46
4-1	-5.245	+106
1-3	+7.541	+40
C-3	+5.819	+16
3-2	-6.760	+13
2-B	-2.590	+17
B-1	+1.804	-65

Előzetes mag. [mBf]		*x* [mm]
1	152.064	-43
2	144.739	+8
3	148.224	-12
4	153.152	+18

Példa szintezési hálózat kiegyenlítésére

Durva hiba hatása:
C-3 vonalon: +20 cm



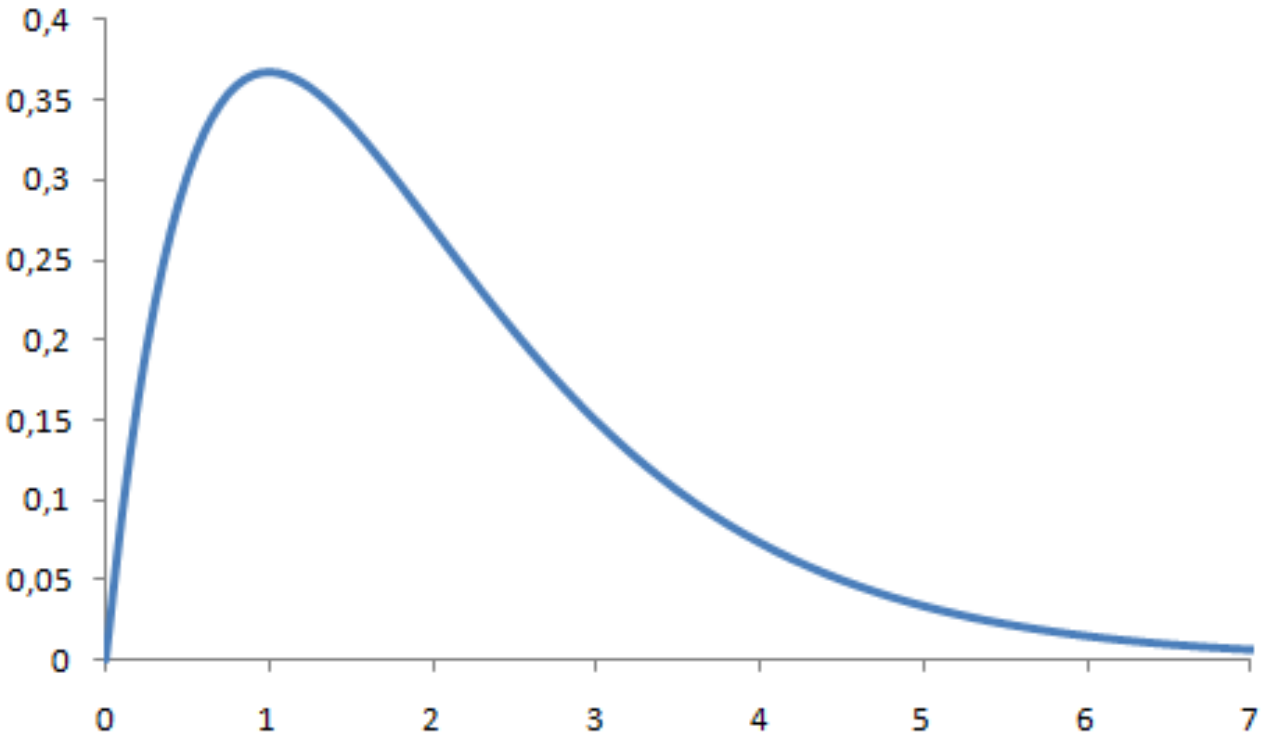
Mérések [m]		*v* [mm]
A-1	-5.567	-4
A-4	-0.460	-52
4-D	+1.578	+22
3-4	-2.488	+63
4-1	-5.045	-14
1-3	+7.541	-57
C-3	+5.619	+134
3-2	-6.760	+50
2-B	-2.590	+62
B-1	+1.804	-50

Előzetes mag. [mBf]		*x* [mm]
1	152.064	-28
2	144.739	-37
3	148.224	-94
4	153.152	-47

Durvahiba szűrés

χ^2-próba:

Az *a priori* és az *a posteriori* súlyegység középhibák (μ_0 és m_0) összehasonlítása.



UNIVERSITAS BUDENSIS

Durvahiba szűrés

Kolmogorov–Szmirnov-próba:

Két minta eloszlásának összehasonlítására alkalmas (a minták eloszlásától függetlenül).

A tapasztalati és az elméleti eloszlásfüggvény eltérésének maximumára egymintás t-próbát végzünk.

UNIVERSITAS BUDENSIS

Durvahiba szűrés

Kolmogorov–Szmirnov-próba:

Nullhipotézis: H_0: $F_X(x) = F_0(x)$

$F_X(x)$ eloszlás megegyezik F_0 eloszlással.

Ellenhipotézis: H_0: $F_X(x) \neq F_0(x)$

Egymintás t-próbával összehasonlítjuk az F_n tapasztalati eloszlást az F_0 eloszlással úgy, hogy a

$$d_n = maximum(|F_n(x) - F_0(x)|)$$

értékét összehasonlítjuk egy α konfidenciaszinthez és az n elemű mintához tartozó elméleti értékkel.

Durvahiba szűrés

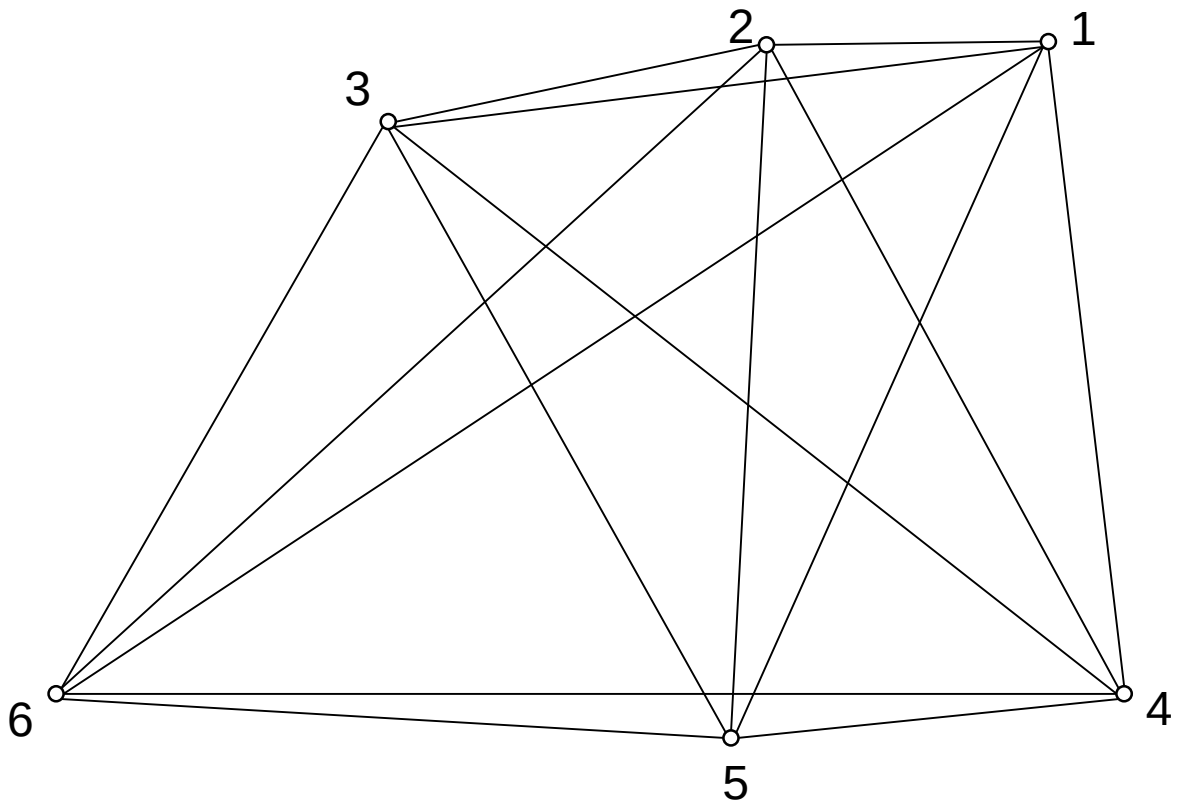
Ha

- kellően „sok” fölösméréssel rendelkezünk,
- a durva hibák száma „kicsi”,

akkor a szabályos hiba megtalálható az alábbi iterációs módszerrel:

- kiegyenlítés a II. k.cs.-tal, majd
- a legnagyobb javításhoz tartozó mérés elhagyása után
- újra kiegyenlítés a II. k.cs.-tal.

Példa vízszintes hálózat kiegyenlítésére

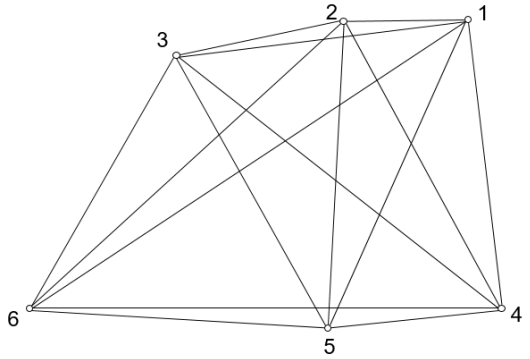


Ismert pontok száma: 6
Paraméterek száma: 18
Mérések száma: 60
Fölösmérések száma: 42

UNIVERSITAS BUDENSIS

ÁP	IP	Irányérték	Zenit szög	F. távolság
1				
	2	31-37-56	94-35-37	106.793
	3	25-25-42	92-59-30	379.401
	6	358-59-12	90-37-17	676.192
	5	326-52-51	90-06-26	436.770
	4	295-51-40	90-07-58	374.940
2				
	3	334-38-41	91-48-07	220.337
	6	303-38-21	89-25-02	548.089
	5	259-07-47	88-15-13	396.084
	4	227-24-16	88-22-10	422.494
	1	165-21-47	85-24-36	160.793
3				
	6	93-49-40	88-05-54	376.997
	5	34-48-38	87-17-43	402.471
	4	11-47-02	87-57-31	531.362
	1	326-52-07	87-00-42	379.399
	2	322-21-23	88-12-04	220.337
4				
	1	55-21-00	89-52-20	374.938
	2	33-09-53	91-38-00	422.493
	3	9-49-54	92-03-00	531.362
	6	331-54-10	90-36-50	607.128
	5	325-30-33	89-57-48	225.081
5				
	4	100-05-02	90-01-06	225.081
	1	40-56-33	89-53-42	436.767
	2	19-27-42	91-44-40	396.084
	3	347-25-53	92-42-14	402.473
	6	290-12-56	90-58-06	384.285
6				
	5	59-30-41	89-02-13	384.284
	4	55-46-19	89-23-42	607.126
	1	22-20-36	89-23-08	676.190
	2	13-16-01	90-35-11	548.088
	3	355-44-37	91-54-35	376.997

hálózat kiegyenlítésére

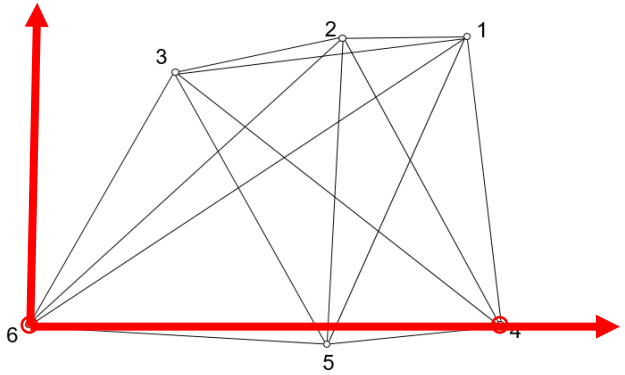


Mozgásvizsgálati hálózat

Minden pontról irány- és távolságmérés történt a másik 5 pontra.

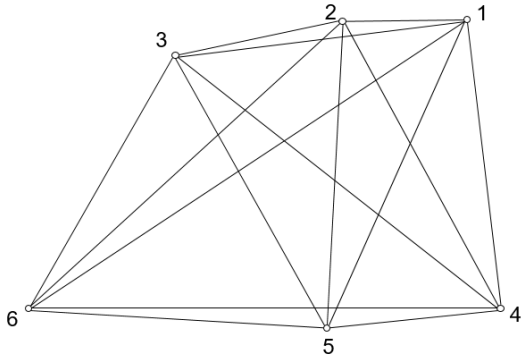
UNIVERSITAS BUDENSIS

Példa vízszintes hálózat kiegyenlítésére



Feldolgozási lehetőségek:

- Kötött hálózatként



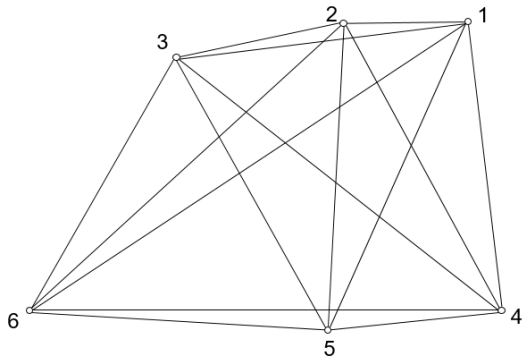
- Szabad hálózatként

Szabad hálózat:
- realisztikusabb hibaeloszlás
- normálegyenletrendszer szinguláris

Példa vízszintes hálózat kiegyenlítésére

Eredmények:

Kötött hálózat

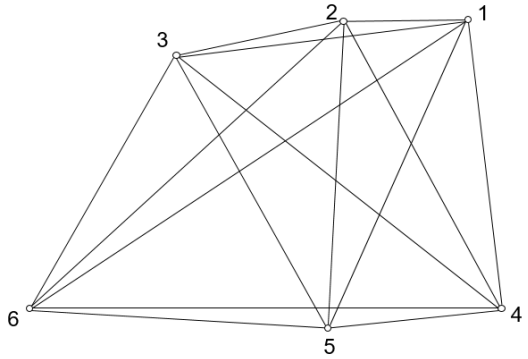


Pontszám	Y [m]	σ_Y [mm]	X	σ_X [mm]
1	564.300	1.1	372.490	1.0
2	404.037	1.1	370.304	0.9
3	188.229	1.0	326.404	1.0
4	607.092		0.000	
5	383.412	0.8	-25.061	0.9
6	0.000		0.000	

Példa vízszintes hálózat kiegyenlítésére

Eredmények:

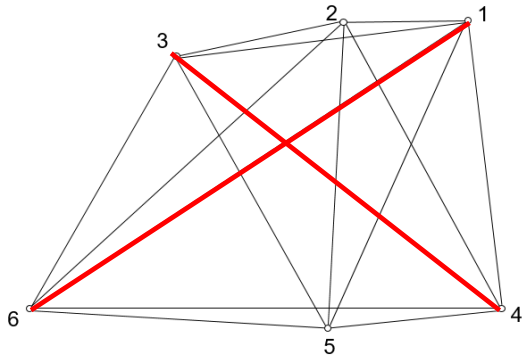
Szabad hálózat



Pontszám	Y [m]	σ_Y [mm]	X	σ_X [mm]
1	564.303	0.5	372.489	0.6
2	404.040	0.5	370.304	0.5
3	188.231	0.5	326.405	0.6
4	607.094	0.6	-0.001	0.6
5	383.412	0.6	-25.061	0.6
6	-0.002	0.6	0.004	0.6

UNIVERSITAS BUDENSIS

Példa vízszintes hálózat kiegyenlítésére



Durva hiba hatása:

1-6 iránymérés: 20”

3-4 távmérés: 5 cm

Kötött hálózat

Pontszám	Y [m]	σ_Y [mm]	X	σ_X [mm]
1	564.300	1.9	372.491	1.7
2	404.036	1.8	370.304	1.5
3	188.229	1.7	326.403	1.7
4	607.092		0.000	
5	383.412	1.4	-25.061	1.6
6	0.000		0.000	

UNIVERSITAS BUDENSIS

UNIVERSITAS BUDENSIS

Példa vízszintes hálózat kiegyenlítésére

Kolmogorov-Szmirnov próba: 91.4 %

Kötött hálózat: eredeti mérések

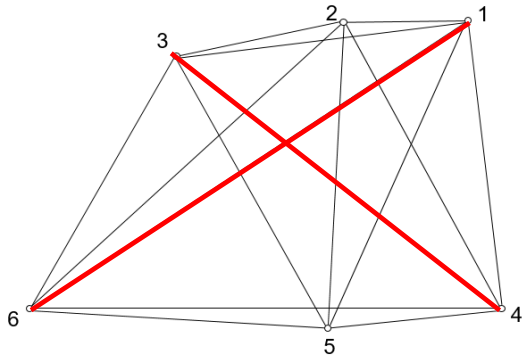
Pontszám	Y [m]	σ_Y [mm]	X	σ_X [mm]
1	564.300	1.1	372.490	1.0
2	404.037	1.1	370.304	0.9
3	188.229	1.0	326.404	1.0
4	607.092		0.000	
5	383.412	0.8	-25.061	0.9
6	0.000		0.000	

Kolmogorov-Szmirnov próba: 6.7 %

Kötött hálózat: durva hibás mérések

Pontszám	Y [m]	σ_Y [mm]	X	σ_X [mm]
1	564.300	1.9	372.491	1.7
2	404.036	1.8	370.304	1.5
3	188.229	1.7	326.403	1.7
4	607.092		0.000	
5	383.412	1.4	-25.061	1.6
6	0.000		0.000	

Példa vízszintes hálózat kiegyenlítésére



Durva hiba hatása:

1-6 iránymérés: 20”

3-4 távmérés: 5 cm

Szabad hálózat

Pontszám	Y [m]	σ_Y [mm]	X	σ_X [mm]
1	564.303	0.9	372.489	1.0
2	404.040	0.9	370.304	1.0
3	188.232	0.9	326.404	1.1
4	607.094	1.0	-0.001	1.0
5	383.412	1.0	-25.061	1.0
6	-0.002	1.1	0.005	1.1

UNIVERSITAS BUDENSIS

Példa vízszintes hálózat kiegyenlítésére

Kolmogorov-Szmirnov próba: 98.4 %

Szabad hálózat: eredeti mérések

Pontszám	Y [m]	σ_Y [mm]	X	σ_X [mm]
1	564.303	0.5	372.489	0.6
2	404.040	0.5	370.304	0.5
3	188.231	0.5	326.405	0.6
4	607.094	0.6	-0.001	0.6
5	383.412	0.6	-25.061	0.6
6	-0.002	0.6	0.004	0.6

Kolmogorov-Szmirnov próba: 26.3 %

Szabad hálózat: durva hibás mérések

Pontszám	Y [m]	σ_Y [mm]	X	σ_X [mm]
1	564.303	0.9	372.489	1.0
2	404.040	0.9	370.304	1.0
3	188.232	0.9	326.404	1.1
4	607.094	1.0	-0.001	1.0
5	383.412	1.0	-25.061	1.0
6	-0.002	1.1	0.005	1.1

Hálózatkiegyenlítés

Kérdések, problémák:

- Fölösmérés nélküli pontok bevonása a kiegyenlítésbe
- Több forduló, vagy oda-vissza szintezés külön-külön bevonása a kiegyenlítésbe
- Hibátlan műszermagasság és jelmagasság feltételezése
- 2D + 1D vagy 3D kiegyenlítés?
- Pontatlan előzetes koordináták, túl nagy tisztatagok

Nyílt forráskódú programok

GNU GaMa – GaMa Local http://www.gnu.org/software/gama/
1D, 2D, 3D geodéziai hálózatok kiegyenlítése
Statisztikai próbák alkalmazása

Surveying Calculation , QGIS modul (GNU GaMa)
http://digikom.hu/SurveyingCalculation

Octave, QtOctave http://www.gnu.org/software/octave/
Általános célú matematikai programcsomag
Mátrix műveletek, eloszlás függvények

Euler http://www.euler-math-toolbox.de/
Általános célú matematikai programcsomag
Mátrix műveletek

R http://www.r-project.org/
Matematikai statisztikai programcsomag

Kereskedelmi szoftverek

Magyar fejlesztések
GeoCalc
GeoEasy (GNU GaMa)
GeoZseni (GNU GaMa)
AutoGeo

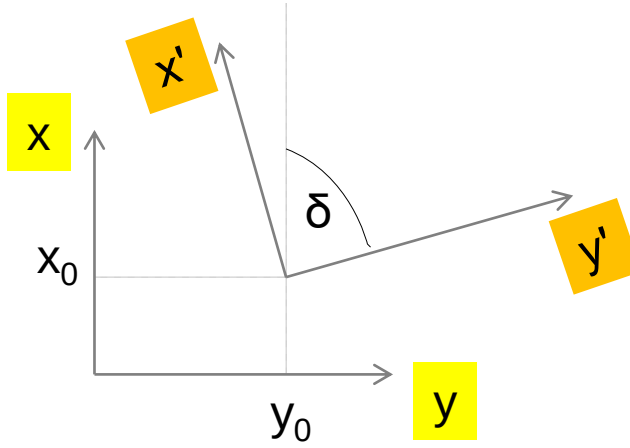
Külföldi fejlesztések
Carlson SurvCE
Columbus
MicroSurvey starnet
...

Koordinátatranszformáció

1D koordinátatranszformáció: 1 eltolás

2D koordinátatranszformáció:

2 eltolás, 1 elforgatás



Feltétele: kellő számú, mindkét rendszerben ismert pont

Közvetítő egyenletek: [x',y'] = f(x,y) alakúak

Nincs mért bennük mennyiség!

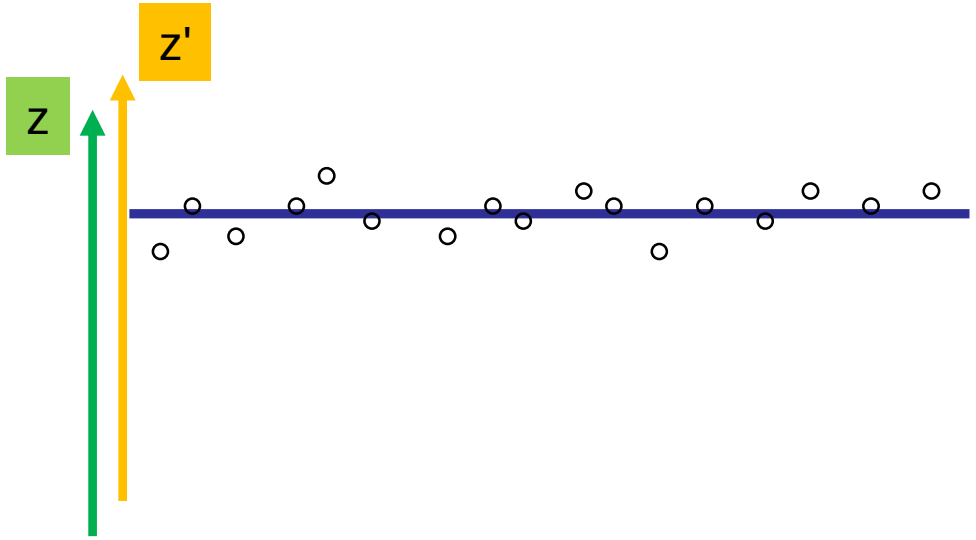
Fiktív mérések: cél-koordinátarendszerben lévő koordináták: x' és y'

UNIVERSITAS BUDENSIS

Koordinátatranszformáció

1D transzformáció

(magassági vagy gravimetriai hálózatok között)

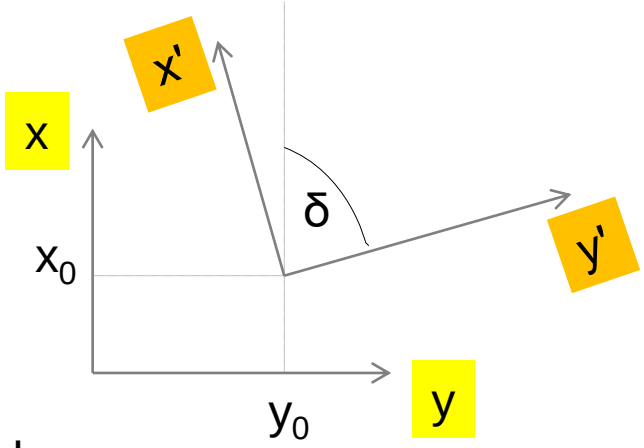


Súlypontok alapján: Mindkét rendszerben ismert értékű pontok alapján számolt átlagérték megadja a két rendszer közötti eltolást.

$$\Delta z = \frac{\sum z_i}{n} - \frac{\sum z'_i}{n}$$

Koordinátatranszformáció

2D transzformáció



Helmert-féle 3 paraméteres

$$y_p' = y_0 + x_P \cdot \sin\delta - y_P \cdot \cos\delta$$
$$x_P' = x_0 + x_P \cdot \cos\delta + y_P \cdot \sin\delta$$

Ismeretlenek:
y_0, x_0, δ

Helmert-féle 4 paraméteres

$$y_p' = y_0 + x_P \cdot r - y_P \cdot m$$
$$x_P' = x_0 + x_P \cdot m + y_P \cdot r$$

Ismeretlenek:
y_0, x_0, r, m

$$r = k \cdot \sin\delta$$
$$m = k \cdot \cos\delta$$

Megoldás: II. kiegyenlítési csoporttal, ahol a fiktív mérések a célkoordináták, x’ és y’

Helyi–EOV transzformáció

Helmert-féle 4 paraméteres

$$y_p' = y_0 + x_P \cdot r - y_P \cdot m$$
$$x_P' = x_0 + x_P \cdot m + y_P \cdot r$$

Ismeretlenek: y_0, x_0, r, m

$$r = k \cdot \sin\delta$$
$$m = k \cdot \cos\delta$$

Elkerülhető:

(1) helyi hálózati pontot GNSS technikával meghatározunk

(2) a kiegyenlítést megismételjük az EOV vetületi síkon (vetületi és tengerszinti redukciók alkalmazásával).

Helyi–EOV transzformáció

Helmert-féle 4 paraméteres

```
  Y = 640122.996 + y *  0.865963189 - x * -0.500045075
  X = 245576.001 + y * -0.500045075 + x *  0.865963189

  Méretarány = 0.99996866 Forgatás = - 30-00-14
```

Pont	y	x	Y	X	dy	dx	táv.
1	0.000	100.000	640173.000	245662.600	-0.001	0.002	**0.003**
3	0.001	-0.001	640123.000	245576.000	0.003	-0.000	**0.003**
5	199.999	0.001	640296.190	245475.990	0.001	-0.004	**0.004**
6	200.000	100.000	640346.190	245562.590	-0.003	0.002	**0.004**

RMS= **0.003**

Pont	y	x	Y	X
2	100.000	100.001	640259.597	245612.594
4	99.999	-0.001	640209.592	245525.997

Méretarány: hossztorzulással jár; alkalmas kisebb vetületi torzulások kezelésére.

Helyi–EOV transzformáció

Helmert-féle 3 paraméteres

```
Y = 0.000 + y *  1.000000000 - x * -0.000024671
X = 0.015 + y * -0.000024671 + x *  1.000000000

  Méretarány = 1.000000000 Elfordulás = -  0-00-05

Pontszám   y         x         Y         X       dY      dX      dt
1          0.001    -0.011    -0.002     0.001  -0.003  -0.003  0.004
2        211.701    -0.009   211.703     0.001   0.001   0.001  0.001
3        257.950   375.643   257.960   375.653   0.000   0.001  0.001
4         78.133   395.493    78.144   395.507   0.001   0.001  0.002

RMS= 0.003

Pontszám   y         x         Y         X
5        -60.366   387.984   -60.357   388.000
```

Ismételt hálózatmérés eredményének szabad hálózatkénti kiegyenlítésekor elkerülhetetlen.

UNIVERSITAS BUDENSIS

Köszönöm a figyelmet!

ÓBUDAI EGYETEM
ALBA REGIA MŰSZAKI KAR

www.uni-obuda.hu